

Označme nyní

$$I(n) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^n} dx \quad (1)$$

vyšetřovaný integrál. Máme rozhodnout o jeho konvergenci, tj. pro jaká n integrál $I(n)$ konverguje.

Předně je třeba si uvědomit, že se jedná o nevlastní integrál jak vlivem funkce (pro dolní mez), tak vlivem meze (v případě meze horní).

Provedeme tedy rozklad integrálu $I(n)$ takto:

$$I(n) = I_1(n) + I_2(n), \quad (2)$$

kde symboly $I_1(n)$ a $I_2(n)$ představují postupně integrály:

$$I_1(n) = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^n} dx \quad (3)$$

$$I_2(n) = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^n} dx \quad (4)$$

Nyní je integrál $I_1(n)$ nevlastním integrálem vlivem funkce a integrál $I_2(n)$ pak nevlastním integrálem vlivem meze.

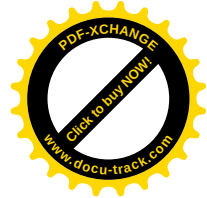
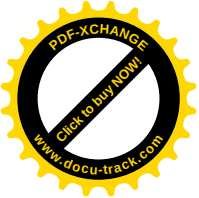
Kromě toho ona horní mez v integrálu $I_1(n)$ a dolní mez v integrálu $I_2(n)$ hraje klíčovou roli. Hned uvidíme proč. Totiž pro $x = 1$ je funkční hodnota integrované funkce identicky rovna $\ln 2$ zcela nezávisle na tom, jak velké je n (samozřejmě výjimku tvoří případ, kdy by se $n \rightarrow \pm\infty$).

Podívejme se nyní na integrál $I_1(n)$. Zde se tedy pohybujeme v mezích $(0; 1)$ pro proměnnou x . Protože jistě platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^n} \quad \text{respektive} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{x}{x^n}} = 1 \quad (5)$$

můžeme vyřešit nyní integrál $I_1(n)$ takto:

$$\begin{aligned} I_1(n) &= \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^n} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{\ln(x+1)}{x^n} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{x}{x^n} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{1-n} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{1-n} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{2-n}}{2-n} \right]_a^1 = \frac{1}{2-n} \lim_{a \rightarrow 0^+} [1^{2-n} - a^{2-n}] = -\frac{1}{n-2} \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^{n-2}} \right) \end{aligned} \quad (6)$$



Je zřejmé, že pro $n \geq 2$ platí:

$$I_1(n) = -\frac{1}{n-2} \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^{n-2}} \right) = +\infty \quad (7)$$

a pro $n < 2$ se jedná o konvergentní Lebesgueův integrál:

$$I_1(n) = -\frac{1}{n-2} \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^{n-2}} \right) = \frac{1}{2-n} \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} a^{2-n} \right) = \frac{1}{2-n} (1-0) = \frac{1}{2-n} \quad (7)$$

Podívejme se nyní na integrál $I_2(n)$.

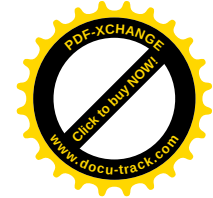
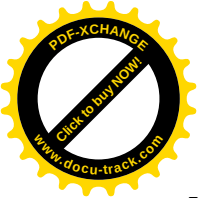
$$\begin{aligned} I_2(n) &= \int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^n} dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(x+1) & u' = \frac{1}{x+1} \\ v' = x^{-n} & v = \frac{x^{1-n}}{1-n} \end{array} \right] = \frac{1}{1-n} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^{n-1}} \right]_1^\infty - \frac{1}{1-n} \int_1^\infty \frac{x^{1-n}}{x+1} dx = \\ &= \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^{n-1}} \right]_1^b - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x^{1-n}}{x+1} dx = \\ &= \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(b+1)}{b^{n-1}} - \ln(2) \right) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x^{1-n}}{x+1} dx \end{aligned}$$

První limitu tohoto výrazu označíme $L_1(n)$. Dále bude zřejmě platit tato rovnost:

$$\frac{x^{1-n}}{x+1} = x^{-n} - x^{-n-1} + x^{-n-2} - x^{-n-3} + \mathcal{L} \quad (8)$$

Dosadíme tedy (8) do řešeného integrálu a vzhledem k následujícím úpravám máme:

$$\begin{aligned} I_2(n) &= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b [x^{-n} - x^{-n-1} + x^{-n-2} - x^{-n-3} + \mathcal{L}] dx = \\ &= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{x^{-n}}{-n} + \frac{x^{-n-1}}{-n-1} - \frac{x^{-n-2}}{-n-2} + \mathcal{L} \right]_1^b = \\ &= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{b^{-n}}{-n} + \frac{b^{-n-1}}{-n-1} - \frac{b^{-n-2}}{-n-2} + \mathcal{L} \right) - \left(\frac{1^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1^{-n}}{-n} + \frac{1^{-n-1}}{-n-1} - \frac{1^{-n-2}}{-n-2} + \mathcal{L} \right) \right] = \\ &= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \mathcal{L} \right) - \left(\frac{b^{-n+1}}{n-1} - \frac{b^{-n}}{n} + \frac{b^{-n-1}}{n+1} - \frac{b^{-n-2}}{n+2} + \mathcal{L} \right) \right] = \\ &= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \mathcal{L} \right) + \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{-n+1}}{n-1} - \frac{b^{-n}}{n} + \frac{b^{-n-1}}{n+1} - \frac{b^{-n-2}}{n+2} + \mathcal{L} \right) \quad (9) \end{aligned}$$



V (9) označíme obě limity postupně $L_2(n)$ a $L_3(n)$:

$$I_2(n) = L_1(n) - L_2(n) + L_3(n), \quad (10)$$

kde tedy je:

$$L_1(n) = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(b+1)}{b^{n-1}} - \ln(2) \right) \quad (11)$$

$$L_2(n) = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + L \right) \quad (12)$$

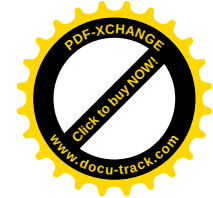
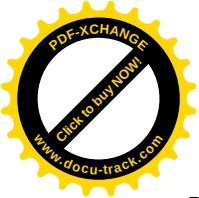
$$L_3(n) = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{-n+1}}{n-1} - \frac{b^{-n}}{n} + \frac{b^{-n-1}}{n+1} - \frac{b^{-n-2}}{n+2} + L \right) \quad (13)$$

Limita $L_1(n)$:

- a) pro $n > 1$ se jedná o vlastní limitu a její hodnota je tedy reálné číslo. Platí v tomto případě $L_1(n) = \frac{-\ln(2)}{1-n}$.
- b) pro $0 \leq n < 1$ limita také existuje, jedná se však o limitu nevlastní, jejíž hodnota je rovna $+\infty$.
- c) pro $n = 1$ limita neexistuje, proto neexistuje integrál $I_2(n)$ a tedy ani integrál $I(n)$.
- d) pro $n < 0$ se jedná opět o nevlastní limitu, jejíž hodnota je rovna $+\infty$.

Limita $L_2(n)$:

- aa) pro $n > 1$ se jedná o vlastní limitu a její hodnota je tedy reálné číslo. Speciálně pro $n = 2$ je hodnota limity rovna $\sqrt{2}$. S rostoucím n jde hodnota limity k nule.
- bb) pro $0 < n < 1$ limita také existuje a jedná se o vlastní limitu a její hodnota je tedy reálné číslo.
- cc) pro $n = 1$ a $n = 0$ limita neexistuje a proto neexistuje integrál $I_2(n)$ a tedy ani integrál $I(n)$.
- dd) pro $n < 0$ (vyjma záporných celých čísel – pro ty limita neexistuje) se jedná o vlastní limitu.



Limita $L_3(n)$:

- aaa) pro $n > 1$ se jedná o vlastní limitu a její hodnota je nula.
- bbb) pro $0 < n < 1$ limita také existuje a jedná se však o nevlastní limitu a její hodnota je $+\infty$.
- ccc) pro $n = 1$ a $n = 0$ limita neexistuje a proto neexistuje integrál $I_2(n)$ a tedy ani integrál $I(n)$.
- ddd) pro $n < 0$ (vyjma záporných celých čísel – pro ty limita neexistuje) se jedná o nevlastní limitu s hodnotou $+\infty$.

Uvážíme-li tento rozbor, integrál $I_2(n)$ je konvergentní pro $n > 1$.

Zopakujme výsledek pro integrál $I_1(n)$. Pro $n \geq 2$ platí: $I_1(n) = -\frac{1}{n-2} \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^{n-2}} \right) = +\infty$

a pro $n < 2$ se jedná o konvergentní Lebesgueův integrál:

$$I_1(n) = -\frac{1}{n-2} \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^{n-2}} \right) = \frac{1}{2-n} \left(1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} a^{2-n} \right) = \frac{1}{2-n} (1-0) = \frac{1}{2-n}$$

Vzhledem k tomu je tedy $I(n)$ konvergentní Lebesgueův integrál pro $1 < n < 2$ a pro $n \geq 2$ má hodnotu $+\infty$.

Dále můžeme říci, že:

- 1) Pro $n \geq 2$ integrál $I(n)$ také existuje, ale jedná se o nevlastní integrál s hodnotou $+\infty$.
- 2) Pro $0 < n < 1$ integrál $I(n)$ také existuje, ale jedná se o i zde nevlastní integrál s hodnotou $+\infty$.
- 3) Pro $n = 1$ a $n = 0$ integrál $I(n)$ neexistuje.
- 4) Pro $n < 0$ obecně integrál $I(n)$ neexistuje.