Označme nyní

$$I(n)=\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^n}dx \qquad (1)$$

vyšetřovaný integrál. Máme rozhodnout o jeho konvergenci, tj. pro jaká $n$ integrál $I(n)$ konverguje.

Předně je třeba si uvědomit, že se jedná o nevlastní integrál jak vlivem funkce (pro dolní mez), tak vlivem meze (v případě meze horní).

Provedeme tedy rozklad integrálu $I(n)$ takto:

$$I(n) = I_1(n) + I_2(n), \qquad (2)$$

kde symboly $I_1(n)$ a $I_2(n)$ představují postupně integrály:

$$I_1(n)=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^n}dx \qquad (3)$$

$$I_2(n)=\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^n}dx \qquad (4)$$

Nyní je integrál $I_1(n)$ nevlastním integrálem vlivem funkce a integrál $I_2(n)$ pak nevlastním integrálem vlivem meze.

Kromě toho ona horní mez v integrálu $I_1(n)$ a dolní mez v integrálu $I_2(n)$ hraje klíčovou roli. Hned uvidíme proč. Totiž pro $x = 1$ je funkční hodnota integrované funkce identicky rovna $\ln 2$ zcela nezávisle na tom, jak velké je $n$ (samozřejmě výjimku tvoří případ, kdy by se $n \to \pm\infty$).

Podívejme se nyní na integrál $I_1(n)$. Zde se tedy pohybujeme v mezích $(0;\ 1\rangle$ pro proměnnou $x$. Protože jistě platí

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^n} \qquad \text{respektive} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\ln(x+1)}{x^n}}{\dfrac{x}{x^n}}=1 \qquad (5)$$

můžeme vyřešit nyní integrál $I_1(n)$ takto:

$$\begin{aligned} I_1(n)&=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^n}dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\ln(x+1)}{x^n}dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{x}{x^n}dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{1-n}dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{1-n}dx= \\ &=\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^{2-n}}{2-n}\right]_a^1=\frac{1}{2-n}\lim_{a\to 0^+}\left[1^{2-n}-a^{2-n}\right]=-\frac{1}{n-2}\left(1-\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{a^{n-2}}\right)\end{aligned} \qquad (6)$$

PDF-XCHANGE Click to buy NOW! www.docu-track.com

Je zřejmé, že pro $n \geq 2$ platí:

$$I_1(n) = -\frac{1}{n-2}\left(1 - \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a^{n-2}}\right) = +\infty \qquad (7)$$

a pro $n < 2$ se jedná o konvergentní Lebensgueův integrál:

$$I_1(n) = -\frac{1}{n-2}\left(1 - \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a^{n-2}}\right) = \frac{1}{2-n}\left(1 - \lim_{a \to 0^+} a^{2-n}\right) = \frac{1}{2-n}(1-0) = \frac{1}{2-n} \qquad (7)$$

Podívejme se nyní na integrál $I_2(n)$.

$$I_2(n) = \int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^n}dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+1) & u' = \dfrac{1}{x+1} \\ v' = x^{-n} & v = \dfrac{x^{1-n}}{1-n} \end{array} \right| = \frac{1}{1-n}\left[\frac{\ln(x+1)}{x^{n-1}}\right]_1^\infty - \frac{1}{1-n}\int_1^\infty \frac{x^{1-n}}{x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty}\left[\frac{\ln(x+1)}{x^{n-1}}\right]_1^b - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{x^{1-n}}{x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty}\left(\frac{\ln(b+1)}{b^{n-1}} - \ln(2)\right) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{x^{1-n}}{x+1}dx$$

První limitu tohoto výrazu označíme $L_1(n)$. Dále bude zřejmě platit tato rovnost:

$$\frac{x^{1-n}}{x+1} = x^{-n} - x^{-n-1} + x^{-n-2} - x^{-n-3} + \ldots \qquad (8)$$

Dosadíme tedy (8) do řešeného integrálu a vzhledem k následujícím úpravám máme:

$$I_2(n) = L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty} \int_1^b \left[x^{-n} - x^{-n-1} + x^{-n-2} - x^{-n-3} + \ldots\right]dx =$$

$$= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty}\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{x^{-n}}{-n} + \frac{x^{-n-1}}{-n-1} - \frac{x^{-n-2}}{-n-2} + \ldots\right]_1^b =$$

$$= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty}\left[\left(\frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{b^{-n}}{-n} + \frac{b^{-n-1}}{-n-1} - \frac{b^{-n-2}}{-n-2} + \ldots\right) - \left(\frac{1^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1^{-n}}{-n} + \frac{1^{-n-1}}{-n-1} - \frac{1^{-n-2}}{-n-2} + \ldots\right)\right] =$$

$$= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty}\left[\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots\right) - \left(\frac{b^{-n+1}}{n-1} - \frac{b^{-n}}{n} + \frac{b^{-n-1}}{n+1} - \frac{b^{-n-2}}{n+2} + \ldots\right)\right] =$$

$$= L_1(n) - \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots\right) + \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \to \infty}\left(\frac{b^{-n+1}}{n-1} - \frac{b^{-n}}{n} + \frac{b^{-n-1}}{n+1} - \frac{b^{-n-2}}{n+2} + \ldots\right) \qquad (9)$$

V (9) označíme obě limity postupně $L_2(n)$ a $L_3(n)$:

$$I_2(n) = L_1(n) - L_2(n) + L_3(n), \tag{10}$$

kde tedy je:

$$L_1(n) = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln(b+1)}{b^{n-1}} - \ln(2)\right) \tag{11}$$

$$L_2(n) = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots\right) \tag{12}$$

$$L_3(n) = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-n+1}}{n-1} - \frac{b^{-n}}{n} + \frac{b^{-n-1}}{n+1} - \frac{b^{-n-2}}{n+2} + \dots\right) \tag{13}$$

Limita $L_1(n)$:

a) pro $n > 1$ se jedná o vlastní limitu a její hodnota je tedy reálné číslo. Platí v tomto případě $L_1(n) = \frac{-\ln(2)}{1-n}$.

b) pro $0 \le n < 1$ limita také existuje, jedná se však o limitu nevlastní, jejíž hodnota je rovna $+\infty$.

c) pro $n = 1$ limita neexistuje, proto neexistuje integrál $I_2(n)$ a tedy ani integrál $I(n)$.

d) pro n $< 0$ se jedná opět o nevlastní limitu, jejíž hodnota je rovna $+\infty$.

Limita $L_2(n)$:

aa) pro $n > 1$ se jedná o vlastní limitu a její hodnota je tedy reálné číslo. Speciálně pro $n = 2$ je hodnota limity rovna $\sqrt{2}$. S rostoucím n jde hodnota limity k nule.

bb) pro $0 < n < 1$ limita také existuje a jedná se o vlastní limitu a její hodnota je tedy reálné číslo.

cc) pro $n = 1$ a $n = 0$ limita neexistuje a proto neexistuje integrál $I_2(n)$ a tedy ani integrál $I(n)$.

dd) pro $n < 0$ (vyjma záporných celých čísel – pro ty limita neexistuje) se jedná o vlastní limitu.

PDF-XCHANGE Click to buy NOW! www.docu-track.com

Limita $L_3(n)$:

aaa) pro $n > 1$ se jedná o vlastní limitu a její hodnota je nula.

bbb) pro $0 < n < 1$ limita také existuje a jedná se však o nevlastní limitu a její hodnota je $+\infty$.

ccc) pro $n = 1$ a $n = 0$ limita neexistuje a proto neexistuje integrál $I_2(n)$ a tedy ani integrál $I(n)$.

ddd) pro $n < 0$ (vyjma záporných celých čísel – pro ty limita neexistuje) se jedná o nevlastní limitu s hodnotou $+\infty$.

Uvážíme-li tento rozbor, integrál $I_2(n)$ je konvergentní pro $n > 1$.

Zopakujme výsledek pro integrál $I_1(n)$. Pro $n \geq 2$ platí: $I_1(n) = -\frac{1}{n-2}\left(1 - \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a^{n-2}}\right) = +\infty$

a pro $n < 2$ se jedná o konvergentní Lebensgueův integrál:

$$I_1(n) = -\frac{1}{n-2}\left(1 - \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a^{n-2}}\right) = \frac{1}{2-n}\left(1 - \lim_{a \to 0^+} a^{2-n}\right) = \frac{1}{2-n}(1-0) = \frac{1}{2-n}$$

**Vzhledem k tomu je tedy *I(n)* konvergentní Lebensgeueův integrál pro *1 < n < 2* a pro *n ≥ 2* má hodnotu +∞.**

Dále můžeme říci, že:

1) Pro $n \geq 2$ integrál $I(n)$ také existuje, ale jedná se o nevlastní integrál s hodnotou $+\infty$.

2) Pro $0 < n < 1$ integrál $I(n)$ také existuje, ale jedná se o i zde nevlastní integrál s hodnotou $+\infty$.

3) Pro $n = 1$ a $n = 0$ integrál $I(n)$ neexistuje.

4) Pro $n < 0$ obecně integrál $I(n)$ neexistuje.